Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Daniel Palacín — Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie

Blatt 2

Abgabe: 12.11.2019, 14Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**

Eine konsistente Theorie T ist *modellvollständig*, wenn für je zwei Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von T gilt, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, falls $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ ist.

a) Zeige, dass die $\mathcal{L}_A$-Theorie $T \cup \mathrm{Diag}^{\mathrm{at}}(\mathcal{A})$ vollständig ist, wenn $\mathcal{A}$ ein Modell der modellvollständigen Theorie T ist.

b) Sei T eine konsistente Theorie derart, dass für jedes Modell $\mathcal{A}$ von T die Theorie $T \cup \mathrm{Diag}^{\mathrm{at}}(\mathcal{A})$ vollständig ist. Zeige, dass T modellvollständig ist.

   Hinweis: Welche $\mathcal{L}_A$-Strukturen sind Modelle von $T \cup \mathrm{Diag}^{\mathrm{at}}(\mathcal{A})$?

c) Zeige, dass jede konsistente Theorie mit Quantorenelimination modellvollständig ist.

d) Sei T eine konsistente Theorie so, dass jede Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ äquivalent modulo T zu einer universellen Formel ist, das heißt, zu einer Formel der Form $\forall y_1 \ldots \forall y_m \psi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$, mit ψ quantorenfrei. Zeige, dass T modellvollständig ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**

In der Sprache $\mathcal{L}$, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht, betrachte die Theorie T, welche besagt, dass die Interpretation der Relation E eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen Äquivalenzklassen ist, welche alle höchstens Mächtigkeit 2 haben.

a) Gib eine Axiomatisierung von T an.

b) Ist T konsistent? Ist T vollständig?

c) Sei $\mathcal{A}$ ein abzählbares Modell von T mit genau einer Äquivalenzklasse der Größe 1 und $\mathcal{B}$ ein abzählbares Modell von T mit genau zwei Äquivalenzklassen der Größe 1. Zeige, dass $\mathcal{A}$ sich in $\mathcal{B}$ einbetten lässt.

d) Ist T modellvollständig? Hat T Quantorenelimination?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Gegeben eine Theorie T in der Sprache $\mathcal{L}$, definiere ihren universellen Teil als

$$T_\forall = \{\chi \text{ universelle } \mathcal{L}\text{-Aussage} : T \models \chi\}.$$

a) Seien gegeben $c_1, \ldots, c_n$ neue Konstantenzeichen und betrachte T als eine Theorie T in der Sprache $\mathcal{L} \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$. Wenn $T \models \varphi[c_1, \ldots, c_n]$ für eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$, zeige, dass $T \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi[x_1, \ldots, x_n]$.

b) Schliesse daraus, dass jedes Modell $\mathcal{A}$ von $T_\forall$ sich in einem Modell von T einbetten lässt.

   Hinweis: Kann die $\mathcal{L}_A$-Theorie $T \cup \mathrm{Diag}^{\mathrm{at}}(\mathcal{A})$ inkonsistent sein?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.